Apuntes sobre dos teoremas de la Geometría Diferencial.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

***Resumen*- El estudio analítico de las curvas y las superficies ha tenido un amplio desarrollo dentro de la matemática en sí, y también ha contribuido a sustentar importantes enunciados en la física – matemática. Se analizan dos teoremas de importancia en el sentido geométrico – diferencial, con el propósito de considerar su valor axiomático en el estudio de la matemática moderna.**

***Palabras Clave*- Geometría diferencial. Teorema Egregium. Teorema Gauss – Bonnet.**

***Abstract*- The analytical study of the curves and surfaces has had an extensive development within mathematics itself, and has also contributed to sustain heavy set forth in physics - mathematics. It is discussed the two theorems of importance in the geometric sense - differential, with the purpose to consider its axiomatic value to study the modern mathematics.**

***Keywords*- Differential Geometry. Egregium theorem. Gauss theorem - Bonnet..**

***Sleutelwoorden*- Differentiaalmeetkunde. Stelling van Egregium. Stelling van Gauss - Bonnet.**

***Zusammenfassung*- Die analytische Untersuchung der Kurven und Flächen hat eine umfangreiche Entwicklung innerhalb der Mathematik selbst hatte und hat auch dazu beigetragen, Schwere, die in der Physik - Mathematik gesetzt erhalten. Es ist den beiden theoreme der Bedeutung im geometrischen Sinne - Differential diskutiert, mit dem Ziel die axiomatische Wert in das Studium der modernen Mathematik zu betrachten.**

***Mathematical Subject Classification:* 53-02.**

I. INTRODUCCIÓN

Un primer intento por definir la curvatura en un punto P de una superficie S en un espacio tridimensional fue expresarlo en términos de la curvatura de las curvas del plano, tomando en consideración las secciones de S como planos a través de la normal en P [1]. Desde luego que planos normales diferentes a la superficie en P pueden intersecar la superficie en curvas muy diferentes que incluyen curvaturas también distintas. Sin embargo, entre todas estas curvas existe una de máxima curvatura, y desde luego, una de mínima curvatura (que puede ser negativa debido al convenio de asignar una curvatura de acuerdo al lado sobre el cual el centro de curvatura se extiende. Leonard Euler en 1760 mostró que estas dos curvaturas κ_1 y κ_2 denominadas curvaturas principales, se forman en secciones perpendiculares y que, juntas, determinan la curvatura κ en una sección determinada con un ángulo α a una de las secciones principales con base en la expresión: $\kappa = \kappa_1 cos^2\alpha + \kappa_2 sen^2\alpha$. Es así que se tiene una condición suficiente y necesaria, siempre y cuando la curvatura de las superficies se subordine a la curvatura de

las curvas en el plano. Una idea mucho más profunda, se le debe a Gauss en el desarrollo de su trabajo en geodesia (concretamente en agrimensura y cartografía), en estos términos: la curvatura de una superficie se puede detectar intrínsecamente, es decir, por las medidas que se realizan completamente sobre la superficie. Así, la curvatura de la tierra se conoció con base en las medidas realizadas por exploradores y expertos que en esa época no tenían una perspectiva desde una altura adecuada (como en la actualidad). En 1827, Gauss realizó el extraordinario descubrimiento de que la cantidad $\kappa_1\kappa_2$ se pueden definir intrínsecamente, por ello pueden ocuparse como una medida intrínseca de curvatura. Estaba tan orgulloso de su resultado que lo llamó Theorema Egregium o Teorema Excelente, y es particularmente interesante que en particular que $\kappa_1\kappa_2$ llamada la Curvatura Gausiana no es afectada por flexión alguna (sin arrugas ni estiramientos). El plano, por ejemplo conserva $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, es decir una curvatura Gaussiana cero. De tal forma que es posible obtener cualquier superficie doblando el plano, como por ejemplo, el cilindro. Es posible verificar el Teorema Excelente o destacable es este caso debido a que una de las curvaturas principales de un cilindro es obviamente cero. Las superficies S_1 , S_2 obtenidas unas de otras por medio del doblez se dice que son isométricas, más precisamente, S_1 , S_2 son isométricas si existe una correspondencia uno a uno entre los puntos P_1 de S_1 y los puntos P_2 de S_2 de tal manera que la distancia entre P_1 y P'_1 en S_1 sea exactamente igual a la distancia entre P_2 y P'_2 en S_2 y donde las distancias se miden dentro de las respectivas superficies. En un estado más preciso del teorema, se tiene que si S_1 , S_2 son isométricos, entonces S_1 , S_2 tienen la misma curvatura Gaussiana en los puntos correspondientes; sin embargo, la afirmación inversa no es verdadera: existen superficies S_1 , S_2 que no son isométricas a pesar de que exista una correspondencia continua y uno a uno entre ellas, por lo que la curvatura Gaussiana es la misma en los puntos correspondientes. Para superficies de curvatura Gaussiana constante existe un mejor acuerdo entre isometría y curvatura (Gaussiana). Tiempo después se discute una interesante generalización de las superficies curvadas conocida como el Teorema Gauss – Bonnet, cuya idea central se refiere a que la superficie curvada κ se puede reemplazar por la curvatura geodésica κ_g, propuesto por

Bonnet en 1848 con base en la proposición: $\int_{\mathcal{C}} \kappa_g \, ds = 2\pi - \iint_{\mathcal{R}} \kappa_1\kappa_2 \; dA$, donde A denota el área, $\mathcal{R}$ indica la región encerrada por $\mathcal{C}$. A este respecto, Gauss publicó solamente un caso especial, o más bien el límite de un caso especial en el que $\mathcal{C}$ es un triángulo geodésico. En este caso, $\kappa_g = 0$ a lo largo de los lados de $\mathcal{C}$, además κ_g se vuelve infinita en las esquinas cuya consecuencia se denomina exceso angular y que Gauss dio a conocer en 1827 su resultado: $exceso\ angular = \iint_{\mathcal{R}} \kappa_1\kappa_2 \; dA$. Si se observa a detalle, se infiere que la integral de la curvatura Gaussiana tiene un significado geométrico más elemental que la curvatura $\kappa_1\kappa_2$. En una carta publicada por Gauss en 1846 afirmó ya haber conocido el término *exceso angular* desde 1794.

II. El teorema Egregium de Gauss.

Definición 1. Sea f una inmersión de una variedad diferenciable *m*-dimensional M de clase C^r en un espacio Euclidiano *n*-dimensional E^n [2].

Esta condición permite que *f* sea un mapeo diferencial de clase C^r, tal que la diferencial df_p es inyectiva en cualquier punto p de M. Además, la imagen $f(M)$ no es necesariamente una sub-variedad de E^n. Por ello, el par (M, f) se denomina sub-variedad inmersa (o también superficie) de E^n. Si $m = 1$, entonces es la curva de E^n; si $m = n - 1$, es la hipersuperficie en E^n.

Las variedades diferenciables o geometría diferencial de las curvas y las superficies, cuando $n = 2\,; n = 3$ son también casos importantes de estudio en este contexto.

En este sentido, un difeomorfismo entre dos superficies que conservan la longitud de arco es equivalente a la condición de que las primeras cantidades fundamentales de las superficies coinciden en cada par de puntos correspondientes, dado que se han introducido parámetros sobre las dos superficies, así que los puntos correspondientes conservan los mismos valores paramétricos. En este caso, tenemos una isometría.

A partir de la ecuación de Gauss podemos observar que el total de la curvatura depende solamente de las primeras cantidades fundamentales. Entonces K es una cantidad que es conservada bajo mapeos isométricos (Teorema egregium, o destacable, de Gauss).

Definición 2. $\bar{E}_1 = F_*(E_1), \bar{E}_2 = F_*(E_2)$. Debido a que F_* conserva el punto producto, $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ es un campo de referencia sobre $\bar{M}$, puesto que:

$$\bar{E}_i \cdot \bar{E}_j = F_*(E)_i \cdot F_*(E)_j = E_i \cdot E_j = \delta_{ij} \,. \qquad \textbf{(1)}$$

Lema 1. Sea $F\colon M \to \bar{M}$ una isometría, y E_1, E_2 un campo de referencia tangencial sobre M. Si $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ es el campo de referencia transferido sobre $\bar{M}$, entonces tenemos dos condiciones:

(1) $\theta_1 = F^*(\bar{\theta})_1, \theta_2 = F^*(\bar{\theta})_2$

$$\omega_{12} = F^*(\bar{\omega})_{12} \,.$$

Prueba. (1) Es suficiente probar que θ_i y $F^*(\bar{\theta})_i$ poseen el mismo valor sobre E_1 y E_2. Sin embargo, para $1 \le i, j \le 2$ se tiene:

$$F^*(\bar{\theta}_i)(E_j) = \bar{\theta}_i\big(F_* E_j\big) = \bar{\theta}_i(\bar{E}_j) = \delta_{ij} = \theta_i(E_j) \,. \qquad \textbf{(2)}$$

(2). Es necesario tomar en cuenta la ecuación estructural $d\bar{\theta}_1 = \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\theta}_2$ sobre $\bar{M}$. Al aplicar F^*, se tiene:

$d(F^*\bar{\theta}_1) = F^*(d\bar{\theta}_1) = F^*(\bar{\omega}_{12}) \wedge F^*(\bar{\theta}_2)$, por el concepto de mapeo de superficies.

De ello, y por (1), se tiene que:

$$d(\theta_1) = F^*(\bar{\omega}_{12}) \wedge \theta_2 \,. \qquad \textbf{(3)}$$

La otra ecuación estructural:

$$d\bar{\theta}_2 = \bar{\omega}_{21} \wedge \bar{\theta}_1 \qquad \textbf{(4)}$$

Genera una ecuación correspondiente:

$$d\theta_1 = F^*(\bar{\omega}_{12}) \wedge \theta_2 \qquad \textbf{(5)}$$

$$d\theta_2 = F^*(\bar{\omega}_{21}) \wedge \theta_1 \qquad \textbf{(6)}$$

Por esta razón (2) es una consecuencia inmediata de la propiedad de unicidad, puesto que la forma de conexión $\omega_{12} = -\omega_{21}$ es la única 1-forma que satisface las primeras ecuaciones estructurales:

$$d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2 \;;\; d\theta_2 = \omega_{21} \wedge \theta_1 \,.$$

El enunciado del Teorema egregium de Gauss, sostiene que [3]:

Teorema 1.

Una curvatura Gaussiana es una invariante isométrica, es decir: Si $F\colon M \to \bar{M}$ es una isometría, entonces $K(p) = \bar{K}(F(\boldsymbol{p}))$ para cualquier punto $\boldsymbol{p}$ en M.

Prueba. Para un punto arbitrario $\boldsymbol{p}$ de M se selecciona un campo de referencia tangente E_1, E_2 en alguna vecindad de $\boldsymbol{p}$ y se transfiere vía F_* hacia $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ sobre $\bar{M}$. Entonces, $F^*(\bar{\omega}_{12}) = \omega_{12}$ por lema 1. Además, $d\bar{\omega}_{12} = -\bar{K}\,\bar{\theta}_1 \wedge \bar{\theta}_2$, por ser la segunda ecuación estructural y derivar de ella una nueva interpretación de curvatura Gaussiana: las ω_{12} representan medidas del rango de rotación del campo de referencia tangente E_1 y E_2, puesto que K determina la derivada exterior $d\omega_{12}$ y se transforma en un tipo de "segunda derivada" de E_1, E_2.

Al aplicar F^* a esta última ecuación, y como consecuencia de los resultados del mapeo de superficies, se tiene:

$$d(F^*\bar{\omega}_{12}) = F^*(d\bar{\omega}_{12}) = -F^*(\bar{K})F^*(\bar{\theta}_1) \wedge F^*(\bar{\theta}_2) \qquad \textbf{(7)}$$

En que $F^*(\bar{K})$ es simplemente la función compuesta $\bar{K}(F)$. Así, con base en el Lema 1:

$$d\omega_{12} = -\overline{K}(F)\theta_1 \wedge \theta_2 \,. \qquad \textbf{(8)}$$

La comparación con $d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$ establece $K = \overline{K}(F)$, y de ello, en particular:
$K(\boldsymbol{p}) = \overline{K}\big(F(\boldsymbol{p})\big)$.

III. CURVATURA TOTAL GAUSSIANA.

En otro sentido Iyanaga afirma que un campo vectorial $\lambda^{\alpha}(t)x_{\alpha}$ definido a lo largo de la curva $u^{\alpha} = u^{\alpha}(t)$ sobre una superficie es paralela en el sentido de Levi – Civita a lo largo de la curva si su derivada covariante a lo largo de la curva se desvanece, es decir:

$$\frac{\delta\lambda^{\alpha}}{dt} = \frac{d\lambda^{\alpha}}{dt} + \frac{\left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\}\lambda^{\beta}du^{\gamma}}{dt} = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

Sea ρ la curvatura sobre una curva C de clase C^2 sobre una superficie S de clase C^2 y sea σ el ángulo entre la binormal de C y la normal de S en el mismo punto. Entonces, $\rho_g = \rho\cos\sigma$ es una cantidad perteneciente a la geometría sobre una superficie y se denomina curvatura geodésica de la curva en el punto. Así, una curva con curvatura geodésica desvaneciente se denomina geodésica, que satisface las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2u^{\alpha}}{ds^2} + \left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\}\frac{du^{\beta}}{ds}\,\frac{du^{\gamma}}{ds} = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Así, el desarrollo de una geodésica es una línea recta (Variedades Riemannianas). Es necesario considerar el dominio limitado orientable *D* simplemente conectado sobre una superficie, tal que el límite de D es una curva simple *C* cerrada que consiste de un número finito de arcos de clase C^2.

Al denotar por $\alpha_i\,, (i = 1, 2, \dots, m)$ a los ángulos externos en los vértices del polígono curvilíneo, se observa lo siguiente:

$$\int_C \rho_g ds + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \iint_D K d_{\alpha} = 2\pi \qquad \textbf{(11)}$$

Este enunciado es conocido como la fórmula de Gauss – Bonnet. Si todos los arcos de *C* son geodésicos, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \iint_D K d\alpha = 2\pi \qquad \textbf{(12)}$$

Al observar esta expresión, se advierte que implica como casos especiales dos teoremas bien conocidos de la geometría euclidiana y de la trigonometría esférica, que son: a) la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a π; el área de un triángulo esférico es proporcional a su exceso esférico. Además, también se relaciona con la siguiente proposición: sobre cualquier superficie orientada cerrada tenemos que: $\iint K\, d\alpha = 2\pi\chi$, en que χ representa la característica Euleriana de la superficie, de modo que $\iint K\, d\alpha$ es la integral de curvatura o curvatura total Gaussiana.

IV. EL TEOREMA GAUSS – BONNET.

Se ha observado con anterioridad que la curvatura Gaussiana K de una superficie geométrica M tiene gran influencia sobre otras características geométricas de *M*, como son las paralelas, la translación, la geodésica, las isometrías y sin lugar a dudas, la forma de *M* si se da el caso que está en E^3, como lo propone O'Neill. Es más, el pensamiento topológico es profundamente influenciado por esta curvatura, sobre todo en el concepto de topología conformacional de M, cuyas propiedades son completamente independientes de la estructura geométrica particular de *M*. La idea principal de esta situación es un teorema relacionado con la curvatura total de un bi – segmento (2-segmento) con la cantidad total de giro de la curva límite. Para una curva arbitraria α en M, la curvatura geodésica explica su rango de giro relativo a la longitud de arco. De esta forma, para evaluar la cantidad total que α gira, es necesario integrar con respecto a la longitud de arco.

Definición 3. Sea $\alpha : [a, b] \to M$ un segmento curvo regular en una superficie geométrica orientada *M*. La curvatura total geodésica $\int_{\alpha} \mathrm{K}_g ds$ de α es:

$$\int_{s(a)}^{s(b)} K_g(s)\; ds \qquad \textbf{(13)}$$

Donde $K_g(s)$ es la curvatura geodésica de una reparametrización unidad – velocidad de α .

La curvatura total geodésica de α en *M* es una analogía de la curvatura total Gaussiana de una superficie en E^3.

Lema 2. Sea $\alpha : [a, b] \to M$ un segmento curvo regular en una región de *M* orientada por un campo de referencia $E_1\,, E_2$, entonces:

$$\int_{\alpha} K_g\, ds = \varphi(b) - \varphi(a) + \int_{\alpha} \omega_{12} \qquad \textbf{(14)}$$

Donde φ es un ángulo función desde E_1 hasta α' hasta α, y ω_{12} es la forma de conexión de $E_1\,, E_2$.

Prueba. Ninguno de estos términos son afectados por la reparametrización que conserva la orientación, por ello α representa una curva de unidad – velocidad. El resultado obtenido se demuestra con el siguiente argumento: β representa una curva de unidad – velocidad en una región orientada por un campo de referencia $E_1\,, E_2$; además, si φ es una función angular desde E_1 y hasta β' , a través de β, entonces:

$$K_g = \frac{d\varphi}{ds} + \omega_{12}(\beta') \,. \qquad \textbf{(15)}$$

Y que a su vez se apoya en la definición de función angular.

■

Es necesario imponer el requerimiento más riguroso. Sea x un elemento uno a uno y además regular sobre el límite en

R. En otros términos, equivale a afirmar que $x: R \to M$ es la restricción a R de una ruta definida sobre algún conjunto abierto que contiene a R. Ahora, cuando x es un bi-segmento (2-segmento) regular, uno a uno, las curvas de sus aristas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son regulares uno a uno y podemos pensar que el límite $\vartheta x = \alpha + \beta - \gamma - \delta$ como una simple curva rota que envuelve la región rectangular $x(R)$. Esta afirmación se argumenta con la siguiente definición:

Sea $x: R \to M$ un bi-segmento (2-segmento) en M con R el rectángulo cerrado $a \leq u \leq b\,, c \leq v \leq d$. Las aristas curvadas de x son el uni-segmento (1-segmento) $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ tales que:

$$\alpha(u) = x(u, c)$$
$$\beta(v) = x(b, v)$$
$$\gamma(u) = x(u, d)$$
$$\delta(v) = x(a, v)$$

Entonces, el límite ϑx del bi-segmento (2- segmento) x es la expresión formal:

$$\vartheta(x) = \alpha + \beta - \gamma - \delta. \quad \textbf{(16)}$$

Estos cuatro segmentos curvados son el resultado de haber considerado la función $x: R \to M$ solamente sobre las cuatro líneas segmento que comprimen el límite del rectángulo R. El signo operador “menos” que antecede a γ , δ en $\vartheta(x)$, nos recuerda que γ , δ se deben “reservar” para proporcionar un recorrido consistente alrededor de la parte curvada de R y también de $\boldsymbol{x}$. Entonces, si ϕ es una uni-forma (1-forma) sobre M, la integral de ϕ sobre el límite de $\boldsymbol{x}$ se define así:

$$\int_{\vartheta x} \phi = \int_{\alpha} \phi + \int_{\beta} \phi - \int_{\gamma} \phi - \int_{\delta} \phi \quad \textbf{(17)}$$

Se llega al momento de definir la curvatura geodésica total de $\vartheta(x)$. Esta definición muestra que el total de la curvatura geodésica de una curva es simplemente el ángulo total que gira la tangente unitaria T (relativo a la longitud de arco). Pero para recorrer todo el camino alrededor, se tiene que:

$$\vartheta(x) = \alpha + \beta - \gamma - \delta \quad \textbf{(18)}$$

No solamente se obtiene el total de giro en las curvas de borde, es decir:

$$\int_{\vartheta x} K_g\, ds = \int_{\alpha} K_g\, ds + \int_{\beta} K_g\, ds + \int_{-\gamma} K_g\, ds + \int_{-\delta} K_g\, ds =$$

$$= \int_{\alpha} K_g\, ds + \int_{\beta} K_g\, ds - \int_{\gamma} K_g\, ds - \int_{\delta} K_g\, ds \quad \textbf{(19)}$$

Además, también los ángulos a través de los que una unidad tangente T sobre $\vartheta(x)$ debería girar a las cuatro esquinas de la región rectangular $x(R)$. Así, se tiene:

$$R: a \leq u \leq b\,, c \leq v \leq d$$

Para estas “esquinas”

$$p_1 = x(a, c)\,, \quad p_2 = x(b, c)\,, \quad p_3 = x(b, d)\,, \quad p_4 = x(a, d)$$

Todos ellos denominados los vértices de $x(R)$.

Así, se puede afirmar que, en general, si un segmento curvo regular α en una región orientada termina en el punto de inicio de otro segmento β, descritos como $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces el ángulo de giro ε desde α hasta β es el ángulo orientado desde $\alpha'(1)$ a $\beta'(0)$ el cual es el más pequeño en valor absoluto. Para un bi-segmento (2-segmento), es posible utilizar la orientación determinada por x, esto es, el área contenida en dM tal que $dM(x_u, x_v) > 0$, para fijar, de alguna manera, una terminología que es familiar en el caso de un polígono en el plano.

Definición 4. Sea $x: R \to M$ un bi-segmento (2-segmento) regular uno a uno, con vértices $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$. El ángulo exterior ε de $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{p}_j$ $(1 \leq j \leq 4)$ es el ángulo de giro en $\boldsymbol{p}_j$ derivado de las curvas de las aristas $\alpha, \beta, -\gamma, -\delta, \alpha, \ldots$, en orden de ocurrencia en $\vartheta(x)$. El ángulo interior ι_j de $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{p}_j$ es $\pi - \varepsilon_j$. Específicamente, los ángulos exteriores pueden fácilmente expresarse en términos de las coordenadas angulares usuales ϑ desde $\boldsymbol{x}_u$ hasta $\boldsymbol{x}_v$ $(0 < \vartheta < \pi)$, de esta forma:

$$\varepsilon_1 = \pi - \vartheta_1\,, \varepsilon_2 = \vartheta_2\,, \varepsilon_3 = \pi - \vartheta_3\,, \varepsilon_4 = \vartheta_4 \quad \textbf{(20)}$$

Donde ϑ_j representa la coordenada angular en el vértice $\boldsymbol{p}_j$.

Teorema 2.

Sea $x: R \to M$ bi-segmento (2-segmento) regular uno a uno en una superficie geométrica M. Si dM es la forma del área sobre $\boldsymbol{x}(R)$ determinada por $\boldsymbol{x}$, entonces:

$$\iint_x K\, dM + \int_{\vartheta x} K_g\, ds + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = 2\pi \quad \textbf{(21)}$$

El primer sumando de la expresión corresponde a una doble integral y representa la curvatura total Gaussiana de $\boldsymbol{x}$, mientras que el segundo sumando que corresponde a una integral simple, denota la curvatura total Gaussiana de ϑx.

Es importante aclarar que la curvatura geodésica y los ángulos exteriores utilizan la orientación de $x(R)$ dadas por dM, en que $dM(\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v) > 0$. Es de notarse que M en sí, no requiere orientarse e inclusive ser orientable.

Se denomina a este resultado la fórmula Gauss – Bonnet con ángulos exteriores. Puesto que $\varepsilon_j = \pi - \iota_j$ para $1 \leq j \leq 4$, la expresión puede reescribirse de esta forma:

$$\iint_x K\, dM + \int_{\vartheta x} K_g\, ds = (\iota_1 + \iota_2 + \iota_3 + \iota_4) = 2\pi \quad \textbf{(22)}$$

En términos de los ángulos interiores de $\boldsymbol{x}(R)$.

Prueba.

Sea $E_1 = \frac{x_u}{\sqrt{E}}$ sobre la región $\boldsymbol{x}(R)$. Entonces, sea E_2 el campo vectorial único tal que E_1, E_2 es un campo de referencia con $dM\,(E_1, E_2) = +1$. Así, la segunda ecuación estructural tiene la forma:

$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2 = -K\,dM$, con base en el Teorema de Stroke, que enuncia lo siguiente:

Si ϕ representa una uni-forma (1-forma) sobre M, y sea $x\colon R \to M$ un bi – segmento (2-segmento), entonces: $\iint_x \, d\phi = \int_{\vartheta x} \phi$.

Por ello, ahora tenemos la siguiente expresión:

$$\iint_x K\,dM + \int_{\vartheta x} \omega_{12} = 0 \quad \textbf{(23)}$$

Entonces, por ***Lema 2***, tenemos:

$$\int_{\vartheta x} \omega_{12} = \int_\alpha \omega_{12} + \int_\beta \omega_{12} - \int_\gamma \omega_{12} - \int_\delta \omega_{12} \quad . \quad \textbf{(24)}$$

Ahora, sobre α tenemos $\alpha' = x_u = \sqrt{E}\; E_1$, así que el ángulo φ desde E_1 hasta α' es idéntico a cero. También, por ***Lema 2***:

$$\int_\alpha \omega_{12} = \int_\alpha K_g\,ds \qquad \textbf{(25)}$$

Ahora, para el caso: $\int_\delta \omega_{12}$, donde al ángulo φ, desde $E_1 = \frac{x_u}{\sqrt{E}}$ hasta $\vartheta' = \boldsymbol{x}_v$ es justamente la coordenada angular ϑ desde $\boldsymbol{x}_u$ a $\boldsymbol{x}_v$. Una vez más, por el ***Lema 2***, se obtiene:

$$\int_\vartheta K_g\,ds = \vartheta_4 - \vartheta_1 + \int_\vartheta \omega_{12} \qquad \textbf{(26)}$$

Donde, $0 < \vartheta_j < \pi$ es la coordenada angular en el vértice p_j, de x, $(1 \le j \le 4)$. Sin embargo, como $\vartheta_1 = \pi - \varepsilon_1$ y $\vartheta_4 = \varepsilon_4$, se reescribe la expresión:

$$\int_\vartheta \omega_{12} = \pi - \varepsilon_1 - \varepsilon_4 + \int_\vartheta K_g\,ds \,. \qquad \textbf{(27)}$$

Expresión que posee una forma similar:

$$\int_\beta \omega_{12} = -\pi + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \int_\beta K_g\,ds \qquad \textbf{(28)}$$

o también:

$$\int_\gamma \omega_{12} = \int_\gamma K_g\,ds \,. \qquad \textbf{(29)}$$

De esta manera, **(24)** se reescribe de la siguiente manera:

$$\int_{\vartheta x} \omega_{12} = \int_\alpha K_g\,ds + \int_\beta K_g\,ds - \int_\gamma K_g\,ds - \int_\delta K_g\,ds - 2\pi + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) =$$

$$= \int_{\vartheta x} K_g\,ds - 2\pi + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \,. \qquad \textbf{(30)}$$

Como un complemento, es posible sustituir esta última expresión en **(23)**.

■

CONCLUSIONES

Pese a que las ideas expuestas anteriormente ya se habían intentado explicar como es el caso de Thomas Harriot en 1603, en concordancia con la investigación de Stillwell, éstas fueron tomando forma al paso de los años, hasta su actual interpretación. Es así que se han descrito dos teoremas de la Geometría Diferencial que son importantes en sí, pero además han dado mucho sustento en la física teórica, como lo es el concepto de geodésica, definido como la línea de menor longitud entre dos puntos en el espacio-tiempo [4]. Además, en el estudio del Análisis tensorial, la curvatura gaussiana sustenta el estudio de las densidades tensoriales (Richards, 1959) aspecto interesante dentro de la física matemática; en el estudio de las propiedades especiales de Holmes – Thompson el tema estudiado en estas líneas también sustenta algunas ideas de la Geometría de Minkowski [5].

REFERENCIAS

[1] [1] Stillwell, J. (2004). Mathematics and its History. Springer – Verlag. N. Y.

[2] Iyanaga, S. (1977) Encyclopedic Dictionary of Mathematics. The MIT Press. Cambridge, M. A.

[3] O'Neill, B. (1966). Elementary Differential Geometry. Academic Press. N. Y.

[4] Richards, P. (1959). Manual of Mathematical Physics. Pergamon Press. Belfast.

[5] Tribble, A. (1996). Princeton Guide to Advanced Physics. Princeton University Press. N. J.

[6] Thompson, A.C. (1996). Minkowski Geometry. Cambridge University Press. Cambridge. MA.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Stillwell, J. (2004). Mathematics and its History. Springer – Verlag. N. Y.

Четверухин, Н. Ф. (1961). Проективная Геометрия. Фиэико-Математической. Литератуы. Москьа.

Doneddu, A. (1979). Análisis y Geometría Diferencial. Colección Ciencia y Técnica Aguilar. Madrid.

Eddington, A. S. (1975). The Mathematical Theory of Relativity. Chelsea Publishing Company. N. Y.

Engelsman, S. (1984). Families of Curves and the Origins of partial Differentiation.

Mathematics Studies. North Holland Publishing. Amsterdam.

Eves, H. (1995). College Geometry. Jones and Bartlett Edition.

N.Y.

Фавар, ж. (1960). Курс Локальнои Дифференциальнои Геометрии. Иностранной. Литератур. Мосва.

Hu, S. T. (1969). Differentiable Manifolds. Hart Rinehart Winston Edition. N. Y.

Lefschetz, S. (1950). L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique. Gauthier – Villars. Paris.

Matos, T. & Wiederhold, P. (2017). Principios matemáticos para ciencias exactas. Colofón. Ediciones Académicas de Matemáticas. Instituto Avanzado de Cosmología. México.

Preston, E. (1932). Projective Differential Geometry of Curves and Surfaces. The University of Chicago Science Series. Chicago, IL.

Шуликоький, в. и. (1963). Классическая Дифференциальиая Геометрия. Фиэико-Математической. Литератуы. Москьа.

Schouten, J. A. & Struik, D. J. (1935). Einführung in die Neueren Mathoden der DifferentialGeometrie. P. Noordhoff Verlag. Amsterdam.

Stoker, J. J. (1969). Differential Geometry. Wiley Interscience. N. Y.